JOURNAL OF TRANSPORT

ISSUE 4, 2024, vol. 1
ISSN: 2181-2438

SLIB.UZ
Scientific library of Uzbekistan

RESEARCH, INNOVATION, RESULTS

TOSHKENT DAVLAT TRANSPORT UNIVERSITETI

Tashkent state transport university

JOURNAL OF TRANSPORT

RESEARCH, INNOVATION, RESULTS

ISSN 2181-2438

VOLUME 1, ISSUE 4

DECEMBER, 2024

jot.tstu.uz

TASHKENT STATE TRANSPORT UNIVERSITY

JOURNAL OF TRANSPORT

SCIENTIFIC-TECHNICAL AND SCIENTIFIC INNOVATION JOURNAL

VOLUME 1, ISSUE 4 DECEMBER, 2024

Founder of the scientific and technical journal "Journal of Transport" – Tashkent State Transport University, 100167, Republic of Uzbekistan, Tashkent, Temiryo'lchilar str., 1, office: 465, e-mail: publication@tstu.uz.

The "Journal of Transport" publishes the most significant results of scientific and applied research carried out in universities of transport profile, as well as other higher educational institutions, research institutes, and centers of the Republic of Uzbekistan and foreign countries.

The journal is published 4 times a year and contains publications in the following main areas:

- Business and Management;
- Economics of Transport;
- Organization of the Transportation Process and Transport Logistics;
- Rolling Stock and Train Traction;
- Infrastructure;
- Research, Design, and Construction of Railways, Highways, and Airfields: Technology and Organization of Construction, Management Problems;
- Water Supply, Sewerage, Construction Systems for Water Protection;
- Technosphere Safety;
- Power Supply, Electric Rolling Stock, Automation and Telemechanics, Radio Engineering and Communications, Electrical Engineering;
- Materials Science and Technology of New Materials;
- Technological Machines and Equipment;
- Geodesy and Geoinformatics;
- Car Service;
- Information Technology and Information Security;
- Air Traffic Control;
- Aircraft Maintenance;
- Traffic Organization;
- Operation of Railways and Roads;

Tashkent State Transport University had the opportunity to publish the scientific-technical and scientific innovation publication "Journal of Transport" based on the Certificate No. 1150 of the Information and Mass Communications Agency under the Administration of the President of the Republic of Uzbekistan. Articles in the journal are published in Uzbek, Russian and English languages.

CONTEXT / MUNDARIJA

Rigidity matrix of a rod element with a variable cross section in problems of calculating structures using the finite element method

M.Kh. Miralimov[1][a]
[1]Tashkent state transport university, Tashkent, Uzbekistan

Abstract: Transport structures have various configurations, which makes modeling their stress state under external loads a complex task. The finite element method makes it possible to model structures of various shapes for strength calculation. This paper considers the derivation of the stiffness matrix for a rod element with a variable cross-section with finding the minimum of the functional under the corresponding boundary conditions, which gives a variational statement of the problem.

Keywords: finite element, beam structure, stiffness matrix, section

Матрица жесткости стержневого элемента с переменным поперечным сечением в задачах расчета конструкций методом конечных элементов

Миралимов М.Х.[1][a]
[1]Ташкентский государственный транспортный университет, Ташкент, Узбекистан

Аннотация: Конструкции транспортных сооружений имеют различные конфигурации, что моделирование их напряженного состояния при внешних нагрузках являются сложной задачей. Метод конечных элементов даёт возможность моделировать для прочностного расчета, конструкций различной формы. В данной работе рассматривается вывод матрицы жесткости для стержневого элемента с переменным поперечным сечением с нахождением минимума функционала при соответствующих граничных условиях, которая дает вариационная постановка задачи.

Ключевые слова: конечный элемент, стержень, матрица жесткости, сечение

1. Введение

Одним из преимуществ метода конечных элементов является возможность рассчитывать конструкции сложной геометрии. Обычно при расчетах профилированные элементы аппроксимируются ступенчатым образом с использованием обычных стержневых элементов постоянной толщины (рис.1). Однако при такой аппроксимации придется брать достаточное количество узлов, что может занимать при решении задачи достаточное время.

2. Методология исследования

Для вывода уравнений МКЭ используем вариационную формулировку задачи [1], где полная энергия Э состоит из потенциальной энергии П деформации тела (потенциала внутренних сил) и энергии (потенциала) А внешних сил

$$I = П + A \qquad (1)$$

Условно будем считать, что в начальном, недеформированном состоянии I = 0.

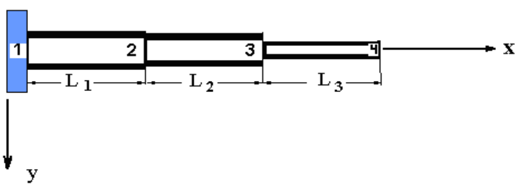

Рис.1. Общий вид стержня

Следовательно, полная энергия Э представляет собой изменение энергии внешних и внутренних сил при переходе тела из начального в деформированное состояние [4]. Энергия любой системы сил измеряется работой, которую могут совершить эти силы при возвращении тела из конечного в начальное, нулевое состояние. Если рассмотреть варьируемые величины П и А, то можно установить ряд полезных свойств, которыми они обладают. Это рассмотрение показывает, что задача анализа конструкций, основанная на подсчете вариации суммы П + А, относится к хорошо разработанной области математики, известной как вариационное исчисление.

В этом случае

$$d\Pi = \frac{1}{2}\sigma_x\varepsilon_x = \frac{1}{2}E\varepsilon_x^2 \qquad (2)$$

где E - модуль Юнга, перемещение точек поперечного сечения может определяться за счет его поворота $\theta = -v'y$, а следовательно, деформация будет $\varepsilon_x = \frac{\partial\theta}{\partial x} = -v''y$, а $d\Pi = \frac{1}{2}E\left(v''\right)^2 y^2$ (штрихом

[a] https://orcid.org/0000-0003-2530-5516

обозначено дифференцирование по x). Будем считать справедливой гипотезу прямых нормалей. Далее напишем

$$\Pi = \frac{1}{2}\iiint_V E\left(v''\right)^2 y^2 dxdydz = \frac{1}{2}\int_0^L EJ_z\left(v''\right)^2 dx \quad (3)$$

В этом выражении для U интеграл $\iint_F y^2 dxdy = J_z$, где J_z момент инерции сечения балки. Для потенциальной энергии внешних сил напишем

$$A = -\int_0^L q(x)vdx$$

Окончательно функционал полной энергии имеет следующий вид

$$I = \Pi + A = \frac{1}{2}\int_0^L EJ_z\left(v''\right)^2 dx - \int_0^L q_v v dx = \int_0^L F(x, v, \frac{dv}{dx})dx \quad (4)$$

Нахождения минимума функционала (4) при соответствующих граничных условиях дает вариационная постановка задач о поперечном изгибе балки стержня постоянного сечения: Основной задачей вариационного исчисления является определение величины $v(x)$, которая доставляет стационарное значение интегралу

$$I = \int_0^L F(x, u, \frac{du}{dx})dx \quad (5)$$

Через f обозначена функция, характеризующая в механике конструкций как плотность дополнительной энергии, аI - функционал, т.е. функция от функции (в данном случае от функции f). В стационарной точке справедливо следующее условие

$$dI(v)/d(v) = 0$$

Тогда малые изменения перемещение v в виде δv приводит к малому изменению функционала, обозначаемому через δI, чтобы получить полезное выражение для δI, необходимо проинтегрировать это выражение по частям. Необходимые условия минимума функционала (4) дает уравнения Лагранжа

$$\frac{dI}{dv} - \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial I}{\partial v''} = 0 \quad (6)$$

Постановка уравнение (4) в уравнение Эйлера-Лагранжа (6) дает дифференциальное уравнение равновесия оси изогнутого бруса в виде формулы

$$EJ_z\frac{dv^4}{dx^4} - q_v = 0 \quad (7)$$

В основе метода конечных элементов (МКЭ) лежит вариационное исчисление [2]. Для этого находим минимум функционала (4) при граничных различных граничных условиях.

Решение ищется как метод Ритца

$$v = \sum_{k=1}^{n} v_k\phi_k(x) = \sum_{k=1}^{n} v_k N_k(x) \quad (8)$$

С той разницей, что v_k является узловыми перемещениями $\phi_k(x) = N_k(x)$ - функция формы одного элемента, где n – число степеней свободы конечно-элементной сетки [2].

Для минимизации функционала, приведенной выше формулам для полной области следует написать систему уравнений

$$\frac{\partial I}{\partial v} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial I^{(1)}}{\partial v_{k,1}} \\ \frac{\partial I^{(2)}}{\partial v_{k,2}} \\ . \\ . \\ \frac{\partial I^{(m)}}{\partial v_{n,m}} \end{Bmatrix} = 0 \quad (9)$$

Здесь m - число элементов. Если справедливо утверждение, что функционал равен сумме вкладов отдельных элементов, т. е., что

$$I = \sum_{i=1}^{m} I^{(m)} \quad (10)$$

то символически уравнение принимает вид

$$\frac{\partial I}{\partial v} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial I}{\partial v_{n,m}}^{(m)} = 0 \quad (11)$$

где, суммирование производится по всем элементам. Таким образом, получено правило составления системы уравнений, минимизирующих функционал, для всего ансамбля [7]. В частном случае, когда I является функционалом вида (10) производную для элемента m можно записать в виде:

$$\frac{\partial I^{(m)}}{\partial v_{n,m}} = [k]^{(m)}v^{(m)} - \vec{P}^{(m)} \quad (12)$$

где $[k]^{(m)}, \vec{P}^{(m)}$ - постоянные матрицы (матрица жесткости и вектор нагрузок элемента). Теперь систему уравнений (12) минимизирующий функционал, можно записать следующим образом

$$\frac{\partial I}{\partial v} = \text{K}\vec{\text{Z}}\text{-}\vec{\text{P}} = 0 \quad (13)$$

Пусть искомые степени свободы, или узловые переменные, принято объединять в так называемые элементные вектора узловых переменных, в данном случае узловых перемещений:

$$\text{K}\vec{Z} = \vec{P} \quad (14)$$

Матричное уравнение (14) представляет собой стандартную форму записи системы линейных алгебраических уравнений метода конечных элементов (СЛАУ МКЭ). Заранее определим, что в полученной системе уравнений операция с граничными условиями производятся в следующем виде: кинематические граничные условия через вектора перемещений, а статические через вектора внешних сил [8]. Стержневой элемент с переменным поперечным сечением, изображенной на рис.2 иллюстрирует основные факторы аппроксимации геометрии конусообразных призматических элементов и пластин переменной толщины.

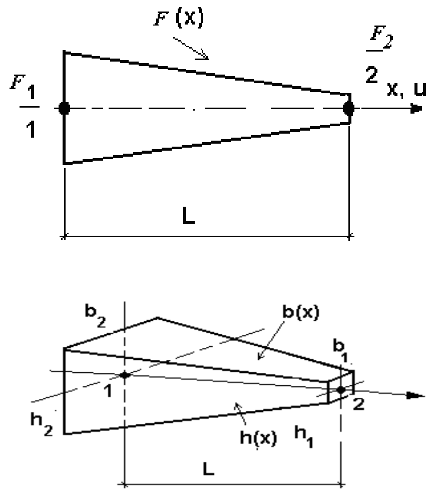

Рис. 2. Расчетная модель элемента

Альтернативный ступенчатому представлению служит простая аппроксимация величины F(x) во всем конструктивном элементе либо на сегментах, разбивающих этот конструктивный элемент. Указанная аппроксимация необходима в силу следующего обстоятельства. Если требуется найти явный вид матрицы жесткости элемента, то, как легко видеть, никаким единым представлением F(x) нельзя задать точно все возможные формы конструкции. Функция перемещений, использовавшаяся для элемента постоянного сечения, в этом случае не является точной, так как она приводит к условию постоянства деформаций, которое уже не выполняется вдоль оси элемента. В практике проектирования профилированных стержневых и пластинчатых элементов в пространстве можно простым способом аппроксимировать геометрические характеристики сечений[9]. Только в этом случае придется рассматривать изменение толщины элемента и в перпендикулярном направлении плоскости расположении элемента, т. е. вместо F(x) следует брать b(x) и h(x), как показанной на рис. 2 :

$$b(x) = (1-\alpha_1\frac{x}{L})b_1,\ h(x) = (1-\alpha_2\frac{x}{L})h_1$$

$$\alpha_1 = \frac{h_1-h_2}{h_1},\ \alpha_2 = \frac{b_1-b_2}{b_1} \qquad (15)$$

можно получить матрицу жесткости для такого элемента, но в этом случае момент инерции поперечного сечения будет зависеть от длины элемента

$$\iint_F y^2 d(b(x))d(h(x)) = \int_F (1+\alpha_1\frac{x}{L})(1+\alpha_2\frac{x}{L})db_1dh_1 =$$

$$= \iint_{F_1} y^2 db_1 dh_1 (1+\alpha_1\frac{x}{L})(1+\alpha_2\frac{x}{L})^2) = J_z(1+\alpha_1\frac{x}{L})(1+\alpha_2\frac{x}{L}) = \frac{bh^3}{12}(1+\alpha_1\frac{x}{L})(1+\alpha_2\frac{x}{L})^3 \qquad (16)$$

С учетом прямоугольности поперечного сечения стержня для момента инерции сечения напишем

$$J_z(1+\alpha_1\frac{x}{L})(1+\alpha_2\frac{x}{L}) = \frac{b_1{h_1}^3}{12}(1+\alpha_1\frac{x}{L})(1+\alpha_2\frac{x}{L})^3$$

Функционал полной энергии имеет следующий вид

$$I = \Pi + A = \frac{1}{2}\int_0^L EJ_z\left(v''\right)^2(1+\alpha_1\frac{x}{L})(1+\alpha_2\frac{x}{L})^3dx - \int_0^L q_v v dx = \int_0^L F(x,v,\frac{dv}{dx})dx \qquad (17)$$

Нахождения минимума функционала (17) при соответствующих граничных условиях дает вариационная постановка задачи о поперечном изгибе балки стержня переменного сечения. Для минимизации функционала воспользуемся уравнениями (9-15) для одного элемента состоящая из двух узлов и тогда матрица жесткости для стержня переменного сечения запишется следующим образом

$$[k] = \int_0^L [N'']^T EJ(x)[N'']dx = \int_0^L (1+\alpha_1\frac{x}{L})(1+\alpha_2\frac{x}{L})^3[N'']^T EJ_1[N'']dx =$$

$$= EJ_1\int_0^L(1+\alpha_1\frac{x}{L})(1+\alpha_2\frac{x}{L})^3\left\{\frac{6}{L^2}(2\xi-1) \quad -\frac{2}{L}(3\xi-2) \quad -\frac{6}{L^2}(2\xi-1) \quad -\frac{2}{L}(3\xi-1)\right\}^T \times \left\{\frac{6}{L^2}(2\xi-1) \quad -\frac{2}{L}(3\xi-2) \quad -\frac{6}{L^2}(2\xi-1) \quad -\frac{2}{L}(3\xi-1)\right\} \qquad (18)$$

Здесь J_1 - момент инерции поперечного сечения в узле 1. Тогда интегрируя зависимость (18) по длине L и с учетом зависимостей для функции формы поле перемещений и переменности поперечного сечения можно получить матрицу жесткости для такого элемента

$$[k] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \qquad (19)$$

где коэффициенты матрицы жесткости принимают следующий вид: ,

$$k_{11} = \frac{EJ_1}{L^3}(11+5(\alpha_1+\alpha_2)+6(\alpha_1+\alpha_2)^2+\frac{24}{5}\alpha_1\alpha_2)$$

$$k_{12} = k_{21} = \frac{EJ_1}{L^2}(13+6(\alpha_1+\alpha_2)+4(\alpha_1+\alpha_2)^2+\frac{69}{13}\alpha_1\alpha_2)$$

$$k_{13} = k_{31} = \frac{EJ_1}{L^3}(-6-3(\alpha_1+\alpha_2)+6(\alpha_1+\alpha_2)^2-\frac{46}{5}\alpha_1\alpha_2),$$

$$k_{14} = k_{41} = \frac{EJ_1}{L^2}(11+12(\alpha_1+\alpha_2)+3(\alpha_1+\alpha_2)^2+\frac{57}{15}\alpha_1\alpha_2)$$

$$k_{22} = \frac{EJ_1}{L}(6+3(\alpha_1+\alpha_2)+12(\alpha_1+\alpha_2)^2+\frac{9}{13}\alpha_1\alpha_2),$$

$$k_{24} = k_{42} = \frac{EJ_1}{L}(4+3(\alpha_1+\alpha_2)+4(\alpha_1+\alpha_2)+\frac{121}{25}\alpha_1\alpha_2)$$

$$k_{23} = k_{32} = \frac{EJ_1}{L^2}(-15-2(\alpha_1+\alpha_2)-4(\alpha_1+\alpha_2)^2-\frac{57}{5}\alpha_1\alpha_2)$$

$$k_{33} = \frac{EJ_1}{L}(6+5(\alpha_1+\alpha_2)+3(\alpha_1+\alpha_2)^2+\frac{49}{13}\alpha_1\alpha_2)$$

$$k_{34} = k_{43} = \frac{EJ_1}{L^2}(-2-3(\alpha_1+\alpha_2)-6(\alpha_1+\alpha_2)^2+\frac{36}{15}\alpha_1\alpha_2)$$

$$k_{44} = k_{44} = \frac{EJ_1}{L^3}(3+4(\alpha_1+\alpha_2)+6(\alpha_1+\alpha_2)^2+\frac{69}{13}\alpha_1\alpha_2)$$

3. Заключение

Таким образом, при вычислении матрицу жесткости для стержня с переменным поперечным сечением необходимо будет задавать размеры поперечного сечения в начале и конце элемента и момент инерции поперечного сечения только в начале элемента.

А задачи с учетом переменности поперечного сечения стержня состоящих из нескольких конечных элементов решаются для различных граничных условий очень просто.

Использованная литература / References

[1] Дацко М. и др. Метод конечных элементов в. статике сооружений. Москва, Стройиздат, 1986, с.220.

[2] Зенкевич О. Конечные элементы и аппроксимации. М.: Мир, 1986, с. 24

[3] Писаренко Г.С., Агарев В.А. и др. Сопротивление материалов: Учебник для вузов.– К.: Высшая школа, 1979.

[4] Маковский, Л.В. Проектирование автодорожных и городских тоннелей: Учеб. Для вузов. – М.: Транспорт, 1993г. – 352с

[5] Булычев Н.С.. Механика подземных сооружений, М.: Недра, 1994, с.268

[6] Гарбер В.А. Научные основы проектирования тоннельных конструкций с учетом технологии их сооружения. НИЦ "Тоннели и Метрополитены". АО "ЦНИИС", 1996, часть 1, с. 169, часть 2, с.220

[7] Тхань Д.В. Заимное влияние двух параллельных тоннелей, сооружаемых щитовым методом в условиях Вьетнама. Дисс. канд. техн. Наук: /, Москва, 2018. -158 с.

[8] Миралимов М.Х. Имитационная модель расчета строительных конструкций и сооружений. // Вопросы кибернетики. Ташкент, Выпуск 175, 2006, С.71-82.

[9] Миралимов М.Х. Информационное моделирование упругопластического состояния выработок тоннелей на персональном компьютере. // Узбекский журнал. «Проблемы информатики и энергетики». Ташкент: Фан, 2000, №5 - С.47-50 (05.00.00; №5).

[10] Mirzohid Miralimov; Shuxrat Shojalilov, Abdullaziz Karshiboev, Dilshod Usmanov. Calculation method of reinforced concrete structures with account of nonlinear deformation of the material. AIP Conf. Proc. 3045, 030078 (2024) doi.org/10.1063/5.0197797.

Информация об авторах/ Information about the authors

Миралимов Мирзахид Хамитович	Д.т.н., доцент кафедры искусственных сооружений на автомобильных дорогах Ташкентского государственного транспортного университета E-mail: mirzakhid_miralimov@yahoo.com Tel.: +998977250924 https://orcid.org/0000-0003-2530-5516