JOURNAL OF TRANSPORT

ISSUE 1, 2025 vol. 2
E-ISSN: 2181-2438
ISSN: 3060-5164

SLIB.UZ
Scientific library of Uzbekistan

RESEARCH, INNOVATION, RESULTS

TOSHKENT DAVLAT TRANSPORT UNIVERSITETI
Tashkent state transport university

JOURNAL OF TRANSPORT

RESEARCH, INNOVATION, RESULTS

E-ISSN: 2181-2438
ISSN: 3060-5164
VOLUME 2, ISSUE 1
MARCH, 2025

jot.tstu.uz

TASHKENT STATE TRANSPORT UNIVERSITY

JOURNAL OF TRANSPORT

SCIENTIFIC-TECHNICAL AND SCIENTIFIC INNOVATION JOURNAL

VOLUME 2, ISSUE 1 MARCH, 2025

The **"Journal of Transport"** established by Tashkent State Transport University (TSTU), is a prestigious scientific-technical and innovation-focused publication aimed at disseminating cutting-edge research and applied studies in the field of transport and related disciplines. Located at Temiryoʻlchilar Street, 1, office 465, Tashkent, Uzbekistan (100167), the journal operates as a dynamic platform for both national and international academic and professional communities. Submissions and inquiries can be directed to the editorial office via email at jot@tstu.uz.

The Journal of Transport showcases groundbreaking scientific and applied research conducted by transport-oriented universities, higher educational institutions, research centers, and institutes both within the Republic of Uzbekistan and globally. Recognized for its academic rigor, the journal is included in the prestigious list of scientific publications endorsed by the decree of the Presidium of the Higher Attestation Commission No. 353/3 dated April 6, 2024. This inclusion signifies its role as a vital repository for publishing primary scientific findings from doctoral dissertations, including Doctor of Philosophy (PhD) and Doctor of Science (DSc) candidates in the technical and economic sciences.

Published quarterly, the journal provides a broad spectrum of high-quality research articles across diverse areas, including but not limited to:

- Economics of Transport
- Transport Process Organization and Logistics
- Rolling Stock and Train Traction
- Research, Design, and Construction of Railways, Highways, and Airfields, including Technology
- Technosphere Safety
- Power Supply, Electric Rolling Stock, Automation and Telemechanics, Radio Engineering and Communications
- Technological Machinery and Equipment
- Geodesy and Geoinformatics
- Automotive Service
- Air Traffic Control and Aircraft Maintenance
- Traffic Organizatsion
- Railway and Road Operations

The journal benefits from its official recognition under Certificate No. 1150 issued by the Information and Mass Communications Agency, functioning under the Administration of the President of the Republic of Uzbekistan. With its E-ISSN 2181-2438, ISSN 3060-5164 the publication upholds international standards of quality and accessibility.

Articles are published in Uzbek, Russian, and English, ensuring a wide-reaching audience and fostering cross-cultural academic exchange. As a beacon of academic excellence, the "Journal of Transport" continues to serve as a vital conduit for knowledge dissemination, collaboration, and innovation in the transport sector and related fields.

Research of a stochastic optimizer based on a logical probability code converter

O.A. Turdiev[1][a]
[1]Tashkent state transport university, Tashkent, Uzbekistan

Abstract: In the modern world, electronic computing devices play an important role, and one of the key factors of their efficiency is high performance, meaning the ability to perform more operations per unit of time. However, complex operations such as multiplication, division, and exponentiation require significant time costs. Stochastic computing devices can be used to speed up these processes. The article discusses the structure of the stochastic optimizer and presents its schematic. It describes the algorithm of the stochastic computing device for solving a stochastic optimization problem. Additionally, an analysis of the performance of the stochastic optimizer is provided, including the dependence of performance on computation accuracy and the dimensionality of the space.

Keywords: Probability Code Converter (LPCV), Stochastic Quasi-Gradient (SQG), Stochastic Theorem, Stochastic Computing Device (StCD), Function

Исследование стохастического оптимизатора на основе логического преобразователя код-вероятности

Турдиев О.А.[1][a]
[1]Ташкентский государственный транспортный университет, Ташкент, Узбекистан

Аннотация: В современном мире электронно-вычислительные устройства играют важную роль, и одним из ключевых факторов их эффективности является высокая производительность, то есть способность выполнять больше операций за единицу времени. Однако сложные операции, такие как умножение, деление и возведение в степень, требуют значительных временных затрат. Для ускорения этих процессов могут быть использованы стохастические вычислительные устройства. В статье рассмотрена структура стохастического оптимизатора и представлена его схема. Описан алгоритм работы стохастического вычислительного устройства для решения задачи стохастической оптимизации. Также проведен анализ быстродействия стохастического оптимизатора, включая зависимость производительности от точности вычислений и размерности пространства.

Ключевые слова: Преобразователь код вероятности (ЛПКВ), стохастический квазиградиент (СКГ), стохастической теоремы, СтВу, функция

1. Введение

В таких областях, как измерительная техника, радиолокация и гидроакустика, часто возникает необходимость решения оптимизационных задач, направленных на нахождение экстремума функции регрессии. Метод оптимизации в данном контексте представляет собой подход, который помогает вычислить минимум или максимум этой функции. На практике, при измерении параметров сигналов, необходимо учитывать влияние случайных помех, которые искажают функцию. Поэтому вместо точной функции в реальных условиях имеется лишь приближенная версия функции или её градиенты.

Стоит отметить, что современные вычислительные устройства обладают высокой производительностью, однако выполнение таких операций, как умножение, деление и возведение в степень, остается достаточно ресурсоемким и времязатратным. Применение стохастического оптимизатора позволяет избежать этих операций, заменяя их на более простые, такие как сдвиг, сложение и вычитание. Основная цель использования стохастического оптимизатора заключается в сокращении времени работы алгоритма на каждой итерации, что в свою очередь способствует снижению общего времени его выполнения.

2. Методология исследования

Сходимость вычислительного процесса и оценка его производительности

На выходе логический преобразователь код вероятности (ЛПКВ) имеется вектор случайных величин $\beta^s = (\beta_1^s, \dots, \beta_n^s)$, где $\beta_k^s = \mathrm{sig}\,n\ (\xi_k^s) u_+(|\xi_k^s| - a^s), k = 1, \dots, n$ и $\xi_k^s -$ составляющие стохастический квазиградиент (СКГ), который является исходной информацией, a^s – равномерно распределённые случайные числа в диапазоне от 0 до $C = 2^1$. Вектор $\gamma^s = c\beta^s$ Будет СКГ. В основу модернизированного

[a] https://orcid.org/0000-0002-1651-5493

алгоритма оптимизации стохастической теоремы в качестве исходных данных будет СКГ γ^s , основание степени a =2 и вместо вещественной степени бетётся её целая часть по функции ent. Везде далее рассматриваются случайные события $\omega \in \Omega$, где (Ω, F, P) – вероятное пространство.

Теорема 1.1. пусть f(x) – выпуклая (возможно, негладкая) функция, заданная на выпуклом компактном множеств $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}^n$ функция удовлетворяет условию Липшица на $\mathbb{X}$.

Если выполняется:

$\max \|x-y\| = c_1$ (1.1)

$x, y \in \mathbb{X}$

$|\xi_k^s| \le 2^1$ п., $l \in \mathbb{Z}$ k=1 ,…, n (1.2)

$M_S \xi^s = \hat{f}(x^s)$, (1.3)

Где $\hat{f}(x^s) \in \delta f(x^s), \xi^s = y^s - \hat{f}(x^s)$, (1.4)

Где $y_k^s = csign\,(\xi_k^s)u_+(|\xi_k^s| - a^s), k = 1, \dots, n$ (1.5)

$a^s \epsilon U[0, c]\ \delta > 0^k$, (1.6)

То с вероятностью 1 все предельные точки последовательности $\{x^s\}$ (задаваемые соотношениями:

$x^{s+1} = \pi_x\left(x^s - 2^{ent(r_s)}y^s\right)\ s = 0,1, \dots$ (1.7)

Где $r_{s+1} = min\{q_0, r_s - < y^{s+1}, \Delta x^{s+1} > \delta 2^{ent(r_s)}\}$ (1.8)

$q_0 > 0,\ r_0 = 0, \Delta x^{s+1} = x^{s+1} - x^s)$ (1.9)

Принадлежат множеству

$$\mathbb{X}^* = \left\{x^* \in \mathbb{X}: f(x^*) = \min_{y_\epsilon \mathbb{X}} f\,(y)\right\}$$

Для доказательства теоремы необходимо доказать несколько лемм. Следует отметить, что из (1.5) следует, что $\|\ y^s\ \| \le C\sqrt{n} = c_2$ п.н. (1.10)

Обозначим $p_s = \ 2^{ent\ (r_s)}$

Лемма 1.1 выполняется соотношение

$\sum_{S=0}^{\infty} 2^{ent\,(r_s)} = \infty$ п.н.

Доказательство. Предположим противное, т.е. существует константа k, для которой вероятность события:

$A = \{\omega$: $\sum_{s=0}^{\infty} 2^{ent(r_s)} \le$k} больше 0, т.е. $P(A) > 0$.

Из (2.7, 2.8, 2.9, 2.10) имеем (по неравенству Шварца [6] и свойствам оператора проектирования π_x [7]):

$r_{s+1} \ge \min(\,q_0 - r_s - \|\ y^{s+1}\ \|\ \|\ \Delta x^2\ \|\ -\delta 2^{ent(r_s)}) \ge \min\ (q_0, r_s -\ c_2^2 2^{ent\ (r_s)} -\ \delta 2^{ent\ (r_s)}) \ge \min\ (q_0, r_s - c_3 2^{ent(r_s)})$ п. н.,

Где $c_3 = c_2^2 + \delta\ ) > 0$. Тогда для элементарных событий $\omega \in A$ имеем (т.к. $r_0 = 0$), что $r_{s+1} \ge \min(\,q_0, -c_3 k)$ (1.11)

Таким образом получим, что $2^{r_{s+1}} \ge min\ (2^{q_0}, 2^{-c_3 k}) > 0\ 2^{r_{s+1}} = 2^{ent\ (r_{s+1}) + \Delta_{s+1}}$, где $-1 < \Delta_{s+1} < 1$. Следовательно $2^{ent(r_{s+1})} \ge 2^{-\Delta_{s+1}}\min(2^{q_0}, 2^{-c_3 k}) \ge 0{,}5\min(2^{q_0}, 2^{-c_3 k}) > 0$, что противоречит соотношению $\sum_{s=0}^{\infty} 2^{ent(r_s)} \le k$ о сходимости ряда, т.к. общий член ряда не стремится к 0. Δ

Лемма 1.2. Выполняется соотношение $\sum_{s=0}^{\infty} \mathrm{M} 2^{2\mathrm{ent}(\mathrm{r_s})} < \infty$ п.н. Доказательство. Покажем, что при фиксированном s значение случайной величины $y_{s+1} = r_{s+1} + f(x^{s+1})$ ограничено на $\mathbb{X}$. По (1.1) и условию Липшица (2) ∃ c_4 и c_5 такие, что $c_4 \le f(x^{s+1}) \le c_5$ для $\forall x \in \mathbb{X}$. Из (1.8)следует, что $r_{s+1} \le q_0$. Из (1.11) $r_{s+1} \le f(x^{s+1}) \le c_5$ для $\forall\ x \in \mathbb{X}$. Из (1.8) следует, что $r_{s+1} \le q_0$. Из (1.11) $\min\,(q_0, -c_3 \sum_{i=0}^{s} p_1) \le r_{s+1}$, что и доказывает это утверждение.

Следовательно, $\exists\ Mr_{s+1}$, по свойству интеграла Стилтьеса для функции ограниченной вариации [1, 3, 5]. Из (1.4), (1.8) учитывая определение градиента выпуклой функции [2] и свойства операции проектирования [4] получим

$$\begin{aligned} r_{s+1} &\le r_s - < y^{s+1}, \Delta x^{s+1} > -\ \delta p_s \\ &\le r_s + f(x^s) - f\,(x^{s+1}) - \\ &< \xi^{s+1}, \Delta x^{s+1} > \delta p_s \end{aligned}$$

Из (1.3), (1.4), (1.7) будет следовать, что $M_{s+1} < \xi^{s+1}, \Delta x^{s+1} > = \ M_{s+1} < \gamma^{s+1} - \hat{f}(x^{s+1})), \pi_x(x^s - p_s\gamma^s) - x^s >$=0, т.к. γ^{s+1} СКГ.

Следовательно, используя свойства условного матожидания [3],

получим $M_{s+1}\,\gamma^{s+1} \le y_s - \delta p_s$ (1.12)

Величина $2^{r_{s+1}}/2^{Mr_{s+1}}$ограничена для $\forall s$. В случае конечного r_{s+1}это утверждение очевидно. По (1.8) $r_{s+1} < q_0$, таким образом остался случайна, когда $r_{s+1} \to \infty$ при $s\ \to \infty$. При $r_{s+1} \to \infty$ для достаточно больших s имеем: $r_{s+1} = r_s - < \gamma^{s+1}, \Delta x^{s+1} > -\ \delta p_s$, где $p_2 = 2^{ent\ (r_s)} \to 0$ при $r_{s+1} \to\ \infty$ при $s\ \to\ \infty$. При $r_{s+1}\ \to \infty$ для достаточно больших s имеем $r_{s+1} = r_s - < y^{s+1}, \Delta x^{s+1} > \ -\partial p_s$, где $p_s = 2^{ent(r_s)} \to\ 0$ при $r_{s+1} \to\ \infty$. Из (1.1, 1.7, 1.8, 1.9, 1.10), используя неравенство Шварца и свойства оператора проектирования π_xполучим, что $r_s|\gamma^{s+1}||\Delta x^{s+1}| - \partial p_s \le\ r_{s+1}\ \le r_s + |\gamma^{s+1}||\Delta x^{s+1}| > \ -\partial p_s$ или $r_s - c_2^2 p_2 - \partial p_s \le r_{s+1} \le r_s + c_2^2 p_2 - \partial p_s$, и $r_s - c_3 p_s \le\ r_{s+1} \le r_s + r_{s+1}$где $c_3 > 0$. Обозначим $z_s =\ r_s - c_3 p_s$ и $t_s = r_s - c_3 p_s$. Тогда $z_s - Mr_{s+1} \le\ r_{s+1} -\ Mr_{s+1} \le\ t_s - Mr_{s+1}$ п.н.

$Mr_{s+1} = \int_{z_s}^{t_s} zdF_{s+1}\,(z)$, *где* $F_{s+1}(z)$*-функция распределения случайной величины* r_{s+1}. Используя формулу интегрирования по части для интеграла Стилтьеса и по теореме о среднем, имеем

$$Mr_{s+1} = zdF_{s+1}(z)\ \ \Big|_{z_s}^{t_s}\ \int_{z_s}^{t_s}{}_{F_{s+1}}(z)dz = t_s - (t_s - z_s)\mu,$$

Где $0 \le \mu \le 1$.

Таким образом:

$-(t_s - z_s)(1-\mu) \le\ r_{s+1} -\ Mr_{s+1}\ \le (t_s - z_3)\mu$

$t_s - z_s =\ r_s - c_3 p_s - r_s - c_3 p_s = 2c_3 p_s$ и т.к. предположили, что $p_s \to 0$ при $s\ \to\ \infty$ по известной теореме из анализа [7] получим $\lim_{s\to\infty}(r_{s+1} -\ Mr_{s+1}) =\ 0$ и, следовательно $\lim_{s\to\infty}(2^{r_{s+1}}/2^{Mr_{s+1}}) = 1$ т.е. величина $2^{r_{s+1} - Mr_{s+1}}$ – Ограничена и для $\forall s$ имеем $\varepsilon > 0$: $\frac{2^{r_2}}{2^{Mr_s}\,\varepsilon} \le 1$. Поскольку $2^{r_s} =\ 2^{ent(r_s) + \Delta}$ - где -1<Δ_s<1, то получим, что

$1 \ge \frac{1}{\varepsilon}, \frac{p_s 2^{\Delta_s}}{2^{Mr_s}} \ge\ \frac{0{,}5p_s}{\varepsilon 2^{Mr_s}}$ (1.13)

Из (1.12, 1.13) имеем, т.к. $\delta > 0$:

$M_{s+1}y_{s+1} \le y_s - \frac{0{,}5\delta}{\varepsilon} * \frac{p_s^2}{2^{Mr_s}}$ п.н. (1.14)

Берём математическое ожидание от обеих частей неравенства и получаем

$My_{s+1} \le My_s - \frac{0{,}5\delta Mp_s^2}{\varepsilon 2^{Mr_s}}$. Переходя к экспоненциальной форме записи получаем

$2^{My_{s+1}} \le\ 2^{My_s}. 2 - 2^{-\frac{0.5\partial Mp_s^2}{\varepsilon 2^{Mr_s}}}$ (1.15)

Пусть , $Z = \frac{0.5\delta Mp_s^2}{\varepsilon 2^{Mr_s}}$, очевидно, $Z > 0$, Так как из (1.8) $p_s = 2^{ent(r_s)} \le 2^{ent(q_0)^{\varepsilon 2}} = \bar{p}$ и учитывая (1.13) получим $0 \le z \le \delta\bar{p}$. В силу выпуклости функции 2^{-Z}имеем, что для $\beta = \frac{1 - 2^{-\delta\bar{p}}}{\delta\bar{p}}$ выполняется неравенство $1 - \beta z \ge 2^{-Z}$. В этом случае из соотношения (1.15) получим, что

$$2^{My_{s+1}} \le 2^{My_s}\left(1 - \beta * \frac{0.5\partial Mp_s^2}{\varepsilon 2^{Mr_s}}\right) = 2^{My_s} -$$
$\frac{\beta 0{,}5\delta c_6 Mp_s^2}{\varepsilon}$, (1.16)

Где $c_5 = {}^{1nf\,2^{f(x)}}_{x\in\mathbb{X}}$, а $y_s = r_s + f(x^s)$

Суммируя неравенство (1.16) при $i = 0, \dots, s$ имеем что

$$2^{My_{s+1}} \le 2^{My_0} - \frac{0{,}5\beta\delta c_6}{\varepsilon}\sum_{i=0}^{s} Mp_1^2$$

$0 \le 2^{My_{s+1}} + 2^{My_{s+1}+Mf(x^{s+1})}$, но $r_{s+1} \le q_0$, и $c_4 \le_{x\in\mathbb{X}}^{f(x)} \le c_5$ т.е. $2^{My_{s+1}}$Ограничена.

Константа $c_0 = \frac{0{,}5\beta\delta c_6}{\varepsilon} > 0$ и окончательно получим, что

$C_0\sum_{1=0}^{s} Mp_1^2 \le 2^{My_0} - 2^{My_{s+1}} < +\infty$, что и доказывает лемму 1.2. Δ

Следствие. Выполняется $p_s \to 0$ и $r_s \to \infty$ при $s \to \infty$ п.н.

Лемма 1.3. Выполняется $\lim_{s\to\infty}(p_{s-1}/p_s) = 1$п.н.

Доказательство. Из (1.8) следует (т.к. $r_s \to \infty$ п.н.), что почти для каждого элементарного события $\omega\epsilon\Omega$ найдется такой номер S(ω), что при $s > S(\omega)$ имеем

$r_{s+1} = r_s + \Delta r_s - \gamma^{s+1}, \Delta x^{s+1} > \delta p_s$ (1.17)

Из (1.7) имеем, что $\Delta x^{s+1} = x^{s+1} - x^{s+1} - x^s(x^s - p_s\, y_s) - x_s$. Используя неравенство Шварца и свойства операторов проектирования на выпуклое множество $\mathbb{X}$, получим

$|\Delta r_s| = |-<\gamma^{s+1}, \Delta x^{s+1} > -\delta p_s| \le \gamma^{s+1}|\pi_x(x^s - p_s y^s) - x^s| + \delta p_s \le c_2^2 p_s + \delta p_s = c_3 p_3,$ (1.18)

где $c_3 > 0$.

Так как $p_s \to 0$ при $s \to \infty$, то для достаточно больших s будет

$|\Delta r_s| \ll 1$, т.е. $r_s \in \mathbb{R}$.

$\frac{p_{s-1}}{p_s} = 2^{ent(r_{s-1}-c_3)}$. Из леммы 1.2. следует, что $p_{s-1} \to 0$ при $s \to \infty$ и переходя к пределу получим

$1 < \lim_{s\to\infty}(p_{s-1}/p_s) \le 1$ при $r \in \mathbb{Z}$ (1.19)

Поскольку $r_s = r_{s+1} + \Delta r_{s+1}$ и из (1.18) следует, что $\Delta r_{s-1} \to 0$, а из Леммы 1.2. $r_{s-1} \to \infty$ то $r_{s-1} \in \mathbb{R}$ и множество $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ будет множеством меры нуль, поэтому получим

$\lim_{s\to\infty}(p_{s-1}/p_{s-1}) = 1$ п.н. Δ

Доказательство теоремы 1.1. основывается на доказанных выше леммах 1.1, 1.2, 1.3 и теореме 1.5. (приложение 2). Это доказательство практически не отличается от доказательства теоремы 1.6. и приведено в приложении 3. Δ

Таким образом, теорема 1.1. доказывает сходимость предлагаемого вычислительного процесса применительно к СтВу.

3. Производительность методов вычисления

Производительность методов вычисления зависит от нескольких факторов: вида функции $f(x)$, характеристик случайных процессов на входе оптимизатора, алгоритма обработки, включая возможность параллельной обработки, способа аппретурной репликации. В данном пункте рассматривается асимптотическая оценка скорости сходимости метода для СтВУ при заданном оценка скорости сходимости метода для СтВу при заданном числе шагов интерации (103). Для оценки скорости сходимости необходимо изучить асимптотические свойства последовательности шаговых множителей $p_s = 2^{ent(r_s)}$из теоремы 1.1.

Лемма 1.4. Для последовательности (x^s) Выполняются все условия теоремы 1.1. и функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на открытом множестве содержащим $\mathbb{X}$, тогда $p_s = 2^{ent(r_s)} = \frac{a}{(1+s)\delta ln2} + 0(1/1+s)$)п.н.

Где $0(1/(s+1))$ – величина бесконечно малая по сравнению с $1/(1+s)$, $a_s \in (0{,}5{:}\,2)$.

Доказательство леммы приведено в приложении 3.

При оценке скорости сходимости рекуррентных стохастических алгоритмов, в качестве критерия, обычно, принимает значение $M|x^s - x^*$-точка минимума функции x (f)на множестве X [2]

Теорема 1.2. Для последовательности (x^s) выполняются все условия теоремы 1.1. функция $f(x)$дважды непрерывно дифференцируема на открытом множестве, содержащим $\mathbb{X}, M|\gamma^s||^2 \le 0_0^2\ s = 0,1,2,\dots. f(x) \ge f(x^*) + B|x^* - x|^2$,

Где $B > 0$ и

x^*точка минимума (f^x) на $\mathbb{X}$, тогда при $\delta_0\ B = /(1{,}25ln2)$ имеем $M|x^* - x^{s+1}|^2 \le \frac{1{,}560_0^2}{B^2(1+s)} + 0\left(\frac{1}{1+s}\right)$ п. н.

Доказательство. Введём функцию вида $w(x^s) = |x^* - x^s|^2$. Из условий теоремы 1.1.

$\xi^s = \gamma^s - \hat{f}(x^s)$. Как следует из (1.18)

$g_{s-1} = 2^{ent(r_{s-1}-c_3 p_s} \le p_s = 2^{ent-(r_{s-1}-\gamma^s, \Delta x^s > -\delta p_s)} \le 2^{ent-(r_{s-1}+c_2 p_{s-1})} = h_{s-1}$ (1.20)

Из леммы 1.4. имеем, что $p_s = \frac{a_2}{(1+s)\delta ln2} + o(1/(1+s))$ п.н., где $a_s \in (0{,}5;2)$. Следовательно, с некоторого номера s и $\varepsilon > 0$ имеем:

$t_s = \frac{a_s - \varepsilon}{(1+s)\delta ln2} < p_s < \frac{a_s + \varepsilon}{(1+s)\delta ln2} = 1_s$ (1.21)

Далее, используем неравенство Швардца и свойство оператора проектирования на выпуклое множество [7, 8], определение СКГ и получим:

$w(x^{s+1}) = |x^* - x^{s+1}|^2 \le |x^* - x^s + p_s\gamma^s|^2$

$w(x^{s+1}) \le w(x^s) + 2p_2 < \gamma^s, x^* - x^s > +p_s^2|\gamma^3|^2 \le w(x^s) + 2p_s\big(f^* - f(x^s)\big) + 2p_s < \xi^s, x^* - x^s > +2g_{s-1} < \xi^s, x^* - x^s > 2g_{s-1} < \xi^s, x^* - x^s > + p_s^2|\gamma^s|^2,$

Где $f^* = f(x^*)$ и использованы свойства градиента дважды непрерывно дифференцируемой функции, т.к. $\gamma^s = \hat{f} - f(x^s)\xi^s$.

Таким образом, используя соотношения (1.20, 1.21), получим:

$w(x^{s+1}) \le w(x^s) + 2p_2\big(f^* - f(x^s)\big) + 2(p_s - g_{s-1})|\xi^s||x^* - x^s| + 2g_{s-1} < \xi^s, x^* - x^s > +p_s^2|\gamma^s|^2 \le w(x^s) + 2t_s\big(f^* - f(x_s)\big) + 2(h_{s-1} - g_{s-1})\,|\xi^s|x^* - x^s| + 2g_{s-1} < \xi^s x^* - x^s > +l_s^2|\gamma^s|^2$

(1.22)

Рассмотрим слагаемое

$$2(h_{s-1} - g_{s-1})|\xi^s||x^* - x^s| = 2\big(2^{ent(r_{s-1}+c_3 p_{s-1})} - 2^{ent(r_{s-1}+c_3 p_{s-1})}\big)_* |\xi^s||x^* - x^s|$$

$|\xi^s|$ Ограничена, $|x^* - x^s| \to 0$ по теореме 1.1, $p_{s-1} \to 0$ и $r_{s-1} \to \infty$ п.н. по следствию леммы 1.2. При достаточно большом s длина интервала $[r_{s-1} - c_3 p_{s-1}, r_{s-1} + c_3 p_{s-1}]$ будет <<1 и тогда в этот интервал может попасть не более чем одно целое число. Учитывая свойства функции ent будем иметь, что $(h_{s-1} - g_{s-1}) \le 2^{ent(r_{s-1}+c_3p_{s-1})} - ent^{(r_{s-1}+c_3p_{s-1})} - 1)2^{(r_{s-1}+c_3p_{s-1})} \le 2^{ent(r_{s-1}+c_3p_{s-1})} \to 0$, т.к. $r_{s-1} \to \infty$ п.н. Функция $ent(y) = const$ в тех промежутках, где $y \in Z$ и поэтому при $s \to \infty$ $(h_{s-1} - g_{s-1}) = 0$ п.н.за исключением множества меры нуль ($\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$)

Таким образом получаем, что

$$w(x^{s+1)} \le w(x^s) + 2t_s(f^* - f(x^s)) + 2g_{s-1} < \xi^s, x^* - x^s + l_s^2|\gamma^s|^2$$

По условию теоремы имеем $f(x) \ge f(x^*) + B|x^* - x^s|^2$ и по (1.10) получим

$$w(x^{s+1}) \le w(x^s) - \frac{2(a_2-\varepsilon)B}{(1+s)\delta ln2} w(x^s) + \frac{(a_2-\varepsilon)^2}{(1+s)^2\delta^2 ln^2 2}|\gamma^s|^2 + 2g_{s-1} < \xi^s, x^* - x^s > \quad (1.23)$$

Величина $\varepsilon > 0$ может быть произвольно малой, поэтому, учитывая, что правая часть неравенств (1.23) выпуклая функция от $a_s \in [0.5; 2]$, то она достигает своего максимума при $a_s = 0{,}5$ или $a_s = 2$

Введём обозначения: $k = 1 + s, C_k = \frac{B}{\delta ln2}$ и $d_k = \frac{0{,}25|\gamma^k|^2}{\delta^2 ln^2 2}$ при $a_s = 0{,}5$ и $C_k = \frac{4B}{\delta ln2}$, $d_k = \frac{4|\gamma^k|^2}{\delta^2 ln^2 2}$ при $a_s = 2$, $w(x^{s+1}) = u_{k+1}$, $C_k = 2g_{s-1} < \xi^s, x^* - x^s >$.

Значения C_k и d_k выбираются из условия $\max\left(\frac{C_k}{K}u_k + \frac{d_k}{k^2}\right)$. Из (1.23) получим, что $u_{k+1} \le u_k - \frac{c_k}{k}u_k + \frac{d_k}{k^2} + G_k$.

Возьмём $\delta \frac{B}{1.25ln2}$ и $v_k = ku_k - \frac{(1{,}25)^2|\gamma^s|^2}{B^2}$. Тогда имеем:

$$v_{k+1} = (k+1)u_{k+1} - \frac{(1{,}25)^2|\gamma^s|^2}{B^2} \le k(1 + 1/k)((1 - C_k/k)u_k + G_k + \frac{d_k}{k^2}) -$$

$$- \frac{(1{,}25)^2|\gamma^s|^2}{B^2} = ku_k(1 - (C_k - 1)/k - C_k/k^2) + d_k(1 + 1/k)G_k -$$

$$- \frac{(1{,}25)^2|\gamma^s|^2}{B^2} = (V_k + \frac{(1{,}25)^2|\gamma^s|^2}{B^2})(1 - (C_k - 1)/k - C_k/k^2) + d_k/k^2 + d_k/k -$$

$$- \frac{(1{,}25)^2|\gamma^s|^2}{B^2} + k(1 + 1/k)G_k = V_k(1 - (C_k - 1)/k - C_k/k^2) -$$

$$- \frac{1{,}25^2|\gamma^k|^2(C_k - 1)}{B^2 k} + d_{k/k} - \frac{C_k(1{,}25)^2|\gamma^s|^2}{k^2 B^2} + d_k/k^2 + k(1 + 1/k)C_k \quad (1.24)$$

Рассмотрим слагаемые:

$$\frac{d_k}{k} - \frac{1{,}25^2|\gamma^k|^2(C_k-1)}{B^2 k} \quad (1.25)$$

При $a_s = 0{,}5$ $C_k = \frac{B}{\delta ln2} = \frac{B}{\frac{Bln2}{1{,}25ln2}} = 1{,}25$ и $d_k = \frac{0{,}25|\gamma^k|^2}{\delta^2 ln^2 2} = \frac{0{,}25|\gamma^k|^2}{\frac{B^2 ln^2 2}{1{,}25^2 ln^2 2}} = \frac{0{,}25(1{,}25)^2\gamma^k|^2}{B^2}$ и тогда значение (1.25) будет равно: $\frac{0{,}25(1{,}25)^2\gamma^k|^2}{B^2 k} - \frac{0{,}25(1{,}25)^2\gamma^k|^2}{B^2 k} = 0$

Аналогично, при $a_s = 2$:

$$C_k = \frac{4B}{\delta ln2} = \frac{4B}{\frac{Bln2}{1{,}25ln2}} = 1{,}25 * 4$$

$-d_k = \frac{4|\gamma^k|^2}{d^2 ln^2 2} = \frac{4|\gamma^k|^2}{\frac{Bln^2 2}{(1{,}25)^2 ln^2 2}} = \frac{4(1{,}25)^2\gamma^k|^2}{B^2}$ и тогда значение выражения (1.25) будет равно:

$\frac{4(1{,}25)^2|\gamma^k|^2}{B^2 k} - \frac{4(1{,}25)^2|\gamma^k|^2}{B^2 k} = 0$ Поэтому из (1.24) получаем соотношение:

$$V_{k+1} \le V_k\left(1 \frac{C_k - 1}{k} \frac{C_k}{k^2}\right) + \frac{d_k - (1{,}25)^2 C_k|\gamma^k|^2}{k^2} + k(1 + \frac{1}{K})C_k \le V_k(1 \frac{minC_k - 1}{k} - \frac{min0_k}{k^2} + \frac{maxd_k}{k^2} + k(1 + \frac{1}{k})C_k \quad (1.26)$$

Учитывая, что $minC_k = 1{,}25 > 1$ и что $C_k = 2g_{s-1} < \xi^s, x^* - x^s >$ т.к. $x^s = \pi_x(x^{s-1} - p_{s-1}\gamma^{s-1})$, $M_s\xi^s = 0$ По определению СКГ, то взяв сначала условное, в потом безусловное математическое ожидание от (1.26) получим

$$\mathrm{M}v_{k+1} \le Mv_k\left(1 - \frac{0{,}25}{k} - \frac{1.25}{k^2}\right) + \frac{4(1{,}25)^2}{B^2 k^2}M|\gamma^k|^2 \le Mv_k(1 - 0{,}25/k) + \frac{4(1{,}25)^2 o_0^2}{B^2 k^2}.$$

По лемме о рекуррентных последовательностях (приложение 2) получим $\lim\limits_{k\to\infty} Mv_k \le 0$. Таким образом, учитывая определение V_k имеем

$\mathrm{M}u_{k+1} \le \frac{(1{,}25)^2 o_0^2}{kB^2} + 0\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1{,}56 o_0^2}{(1+s)B^2} + 0\left(\frac{1}{1+s}\right)$, что и доказывает теорему. Δ

Следствие из теоремы 1.2. по (1.10) имеем

$$M|x^* - x^{s+1}|^2 \le \frac{1{,}56nc^2}{(s+1)}.$$

Если минимум функции $f(x)$ находятся внутри множества X или, если решается задача безусловной оптимизации, то $\nabla f(x^*) = 0$ и тогда, при $s \to \infty$ имеем $|\nabla f(x^s)| \to 0$ п.н.,т.е. для достаточно больших s будет $|\nabla f(x^s)| \le \varepsilon_1$, где $\varepsilon_1 > 0$ произвольно малое положительное число. При исследовании вопросов стохастической оптимизации, как правило, задаётся ограничение o^2 на дисперсию компонентов СКГ [4] в виде соотношения $M\left(\xi_k^s - \hat{f}_k(x^s)\right) < o^2$ $k = 1, n, s = 0,1, \dots.,$ где $n-$ размеренность пространства. Для дифференцируемой функции $f_k(x^s) = \nabla f_k(x^s)$ и в окрестности стационарной точки значение $\nabla f_k(x^s)$ мало.

Поэтому, при асимптотических оценках можно положить оценках можно положить, что $M[(\xi_k^s)^2] < o^2$ начиная с некоторого s. Из (2.5) имеем $(\gamma_k^s)^2 = c^2 u_+(|\xi_k^s| - a^s), k = \overline{1,n}.$

Далее, берём математическое ожидание и получим (см. п.1.2)

$M[(\gamma_k^s)^2] = cM|\xi_k^s| = 2^1 M|\xi_k^s|.$ Используя неравенство Йенсена [8] получим $o^2 > M[(\xi_k^s)^2] \ge [M|\xi_k^s|]^2 = \{\frac{M(\gamma_k^s)^2]}{C}\}^2$. Следовательно $co > M(\gamma_k^s)^2]$.

По определению евклидовой нормы имеем

$M|\gamma^s|^2 = \sum_{k=1}^n M\,(\gamma_k^s)^2$ и получаем, что $nco > M|\gamma^s|^2$ и тогда можно положить $0_0^2 = nco.$ (1.27)

По условию теоремы 2.1. $|\xi_k^s| < c$ п.н. $k = \overline{1,n}, s = 0,1, \dots.,$ то воспользовавшись правилом трёх сигма можно считать, что $c = 3o$ и тогда $o_0^2 = 3no^2$ (1.28)

Проведя аналогичные выкладки для метода по теореме 1.6. учитывая, что вместо γ^s там используют СКГ ξ^s , $a_s = 1$ и т.к. $no^2 > M|\xi_k^s|^2$ получим, что

$$M|x^{*}-x^{s+1}|^{2}\leq\frac{no^{2}}{\delta^{2}ln^{2}2(2B/(\delta^{2}ln2)-1)(1+s)}+o(1/(1+s)].$$

Из теоремы 1.2. $\delta = B/(1{,}25ln2)$ (1.29)

И тогда для исходного метода-аналога будет:

$$M|x^{*}-x^{s+1}|^{2}\leq\frac{no^{2}}{B^{2}(1+s)}+0\left(\frac{1}{1+s}\right).$$

Для исследуемого метода по теореме 2.2. получим оценку:

$$M|x^{*}-x^{s+1}|^{2}\leq\frac{4{,}7no^{2}}{B^{2}(1+s)}+0\left(\frac{1}{1+s}\right)=\frac{1{,}56nco}{B^{2}(1+s)}+0\left(\frac{1}{1+s}\right) \quad (1.30)$$

Таким образом, ориентировочно можно сравнить по количеству шагов итерации исследуемый метов и метод аналог.

Пусть S – число итераций для СтВУ с ЛПКВ, а N – число итерации для исходного алгоритма, необходимое для достижения заданной точности вычислений, тогда получим

$$\frac{S}{N}=\frac{1{,}56c}{\sigma} \quad (1.31)$$

Или, при выполнении соотношения $c = 3\sigma$, будет:

$$\frac{S}{N}=4{,}7=5\ \text{раз} \quad (1.32)$$

4. Заключение

Время выполнения алгоритма зависит от конкретной задачи оптимизации, то есть от стохастического квазиградиента, а также от структуры вычислительного устройства, времени выполнения базовых операций, таких как сдвиг и сложение, и требуемой точности вычислений. Структура вычислительного устройства, в свою очередь, определяется размерностью задачи и разрядностью регистров, используемых в процессе вычислений, что связано с необходимой точностью расчетов.

Использованная литература / References

[1] Odilzhan A. Turdiev., Vladimir A. Smagin. Investigation of the computational complexity of the formation of checksums for the Cyclic Redundancy Code algorithm depending on the width of the generating polynomial. Международная научно-методическая конференция. Models and Methods for Researching Information Systems in Transport // СПб – 2020. (индексирована в SCOPUS).

[2] Свистунов С. Г. Исследование принципов построения стохастических процессоров, реализующих адаптивные квазиградиентные методы статистической оптимизации: автореф. дис. ... канд. техн. наук / С. Г. Свистунов. – СПб., 1996.

[3] Фёдоров Р. Ф. Стохастические преобразователи информации / Р. Ф. Фёдоров, В. В. Яковлев, Г. В. Добрис. – Л.: Машиностроение, 1978. 304 с.

[4] Турдиев О.А., Хомоненко А.Д., Гофман М.В. Сравнение моделей вероятного кода числа PNC и циклического избыточного кода CRC. // Вестник Российского нового университета. Серия «Сложные системы: модели, анализ и управление». №4-1 2021 года.

[5] Соловьёв Г. Н. Схемотехника ЭВМ / Г. Н. Соловьёв. – М.: Высш. шк., 1985. 391 с.

[6] Турдиев О.А., Сейтманбитов Д.А., Кадирова Ш.Ш. Методика снижения вычислительной сложности формирования контрольных сумм вероятного кода числа на основе стохастических вычислений. // Вестник Российского нового университета. Серия «Сложные системы: модели, анализ и управление». №4-2. 2021 года.

[7] Яковлев В. В. Стохастические вычислительные машины / В. В. Яковлев, Р. Ф. Фёдоров. – Л.: Наука, 1973. 298 с.

[8] Турдиев Одилжан Акрамович. Исследование вычислительной сложности формирования контрольных сумм для алгоритма CRC в зависимости от разрядности порождающего полинома. // Журнал «Современная наука: актуальные проблемы теории и практики». Серия «Естественные и технические науки». №2. 2022 года.

Информация об авторах/ Information about the authors

Турдиев Одилжан / Odilzhan Turdiev	Ташкентский государственный транспортный университет, в.б. доцент кафедры «Информационные системы и технологии в транспорте», к.т.н., (PhD) E-mail: odiljan.turdiev@mail.ru Tel.: +998974607179 https://orcid.org/0000-0002-1651-5493

CONTEXT / MUNDARIJA